XIII. GEOMETRIA BRYŁ

	krawędzie	wierzchołki	ściany
Graniastosłup n -kątny:	$3n$	$2n$	$n+2$

GRANIASTOSŁUPY :

Graniastosłup to wielościan posiadający dwie identyczne i równoległe podstawy oraz ściany boczne będące równoległobokami.

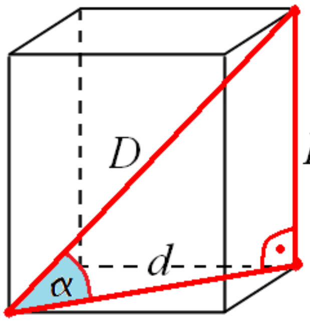
Graniastosłup prosty, to graniastosłup o prostokątnych ścianach bocznych (krawędzie boczne są prostopadłe do podstawy).

Graniastosłup prawidłowy, to graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny (np. graniastosłup prawidłowy trójkątny ma w podstawie trójkąt równoboczny, zaś graniastosłup prawidłowy czworokątny ma w podstawie kwadrat).

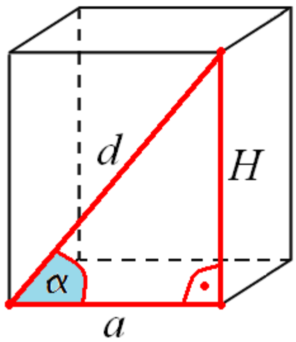
Prostopadłościan, to graniastosłup prosty, którego wszystkie ściany są prostokątami.

Sześcian foremny to graniastosłup, w którym wszystkie sześć ścian są identycznymi kwadratami.

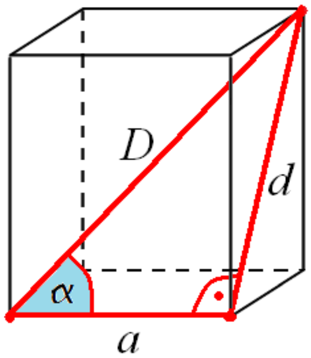
• **Odcinki i kąty w graniastosłupach**:



α - kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do płaszczyzny podstawy



α - kąt nachylenia przekątnej ściany bocznej do płaszczyzny podstawy



α - kąt nachylenia przekątnej graniastosłupa do krawędzi podstawy

• **Pole powierzchni i objętość graniastosłupów**:

Objętość:

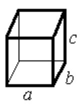
$$\boxed{V = P_p \cdot H}$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$\boxed{P_c = 2 \cdot P_p + P_b}$$

P_b - pole boczne (suma pól ścian bocznych)

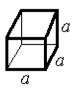
Prostopadłościan:



$V = a \cdot b \cdot c$

$P_c = 2ab + 2bc + 2ac$

Sześcian:



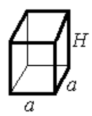
$V = a^3$

$P_c = 6 \cdot a^2$

Graniastosłup prawidłowy czworokątny:

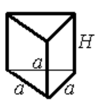
$V = a^2 \cdot H$

$P_c = 2a^2 + 4 \cdot a \cdot H$



Graniastosłup prawidłowy trójkątny:

$V = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$



$P_c = 2 \cdot \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot a \cdot H$

ĆWICZENIE:

Uzupełnij tabelkę i dotyczącą własności sześcianu.

sześcian foremny:

krawędź sześcianu	**suma długości krawędzi**	**przekątna sześcianu**	**przekątna ściany bocznej**	**pole ściany bocznej**	**pole boczne**	**pole całkowite**	**objętość**
a	$12a$	$D=a\sqrt{3}$	$d=a\sqrt{2}$	$P_{sb}=a^2$	$P_b=4a^2$	$P_c=6a^2$	$V=a^3$
$\boxed{3}$							
					$\boxed{16}$		

ZADANIA:

1. Oblicz sinus kąta między przekątną sześcianu, a jego płaszczyzną podstawy.

2. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa wiedząc, że pole podstawy wynosi 9 cm^2.

3. Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 16. Przekątna graniastosłupa jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem, którego cosinus jest równy 0,6. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa. [2015-05]

4. Najdłuższa przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 10 cm, a jego wysokość jest równa 5 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

5. Graniastosłup ma 66 krawędzi. Ile ma ścian bocznych i ile wierzchołków?

	krawędzie	wierzchołki	ściany
Ostrosłup n -kątny:	$2n$	$n+1$	$n+1$

OSTROSŁUPY :

Ostrosłup to wielościan, którego podstawą jest dowolny wielokąt, a ściany boczne są trójkątami o wspólnym wierzchołku.

Wysokość ostrosłupa to odcinek łączący wierzchołek ostrosłupa i spodek wysokości.

Spodek wysokości to rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy.

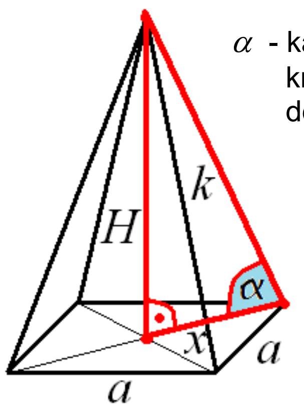
Ostrosłup prosty, to ostrosłup w którym spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie. W ostrosłupie prostym krawędzie boczne są równej długości, a ściany boczne są trójkątami równoramiennymi.

Ostrosłup prawidłowy, to ostrosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny.

Czworościan foremny to ostrosłup, którego wszystkie cztery ściany są identycznymi trójkątami równobocznymi.

• **Odcinki i kąty w ostrosłupach**:

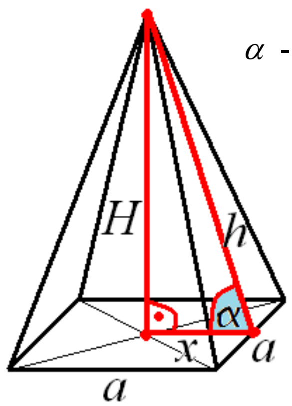
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym:



α - kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy

$$\boxed{x=\frac{1}{2}d}$$

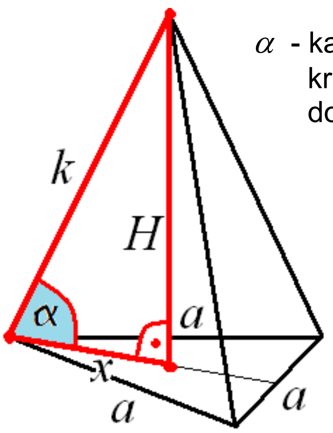
$$x=\frac{1}{2}\cdot a\sqrt{2}=\frac{a\sqrt{2}}{2}$$



α - kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy

$$\boxed{x=\frac{1}{2}a}$$

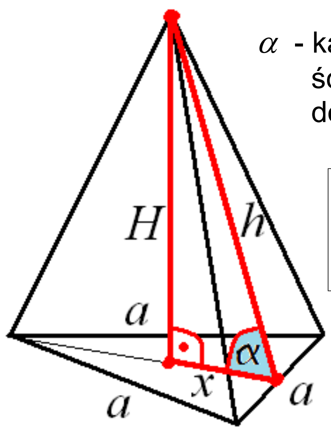
W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym:



α - kąt nachylenia krawędzi bocznej do płaszczyzny podstawy

$$\boxed{x=\frac{2}{3}h_p}$$

$$x=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$$



α - kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy

$$\boxed{x=\frac{1}{3}h_p}$$

$$x=\frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$$

• **Pole powierzchni i objętość ostrosłupów**:

<u>Objętość</u>:

$$\boxed{V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot H}$$

<u>Pole powierzchni całkowitej</u>:

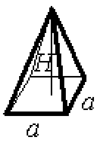
$$\boxed{P_c = P_p + P_b}$$

P_b - pole boczne (suma pól ścian bocznych)

<u>Ostrosłup prawidłowy czworokątny</u>:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H$$

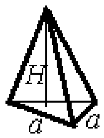
$$P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_{sb}$$



<u>Ostrosłup prawidłowy trójkątny</u>:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H$$

$$P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_{sb}$$



<u>Czworościan foremny</u>:

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$P_c = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}$$

ZADANIA:

6. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość czworościanu foremnego o długości krawędzi 10 cm.

7. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym płaszczyzna ściany bocznej jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 60°. Krawędź podstawy ma długość 6 cm. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

8. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym krawędź podstawy ma długość 6 cm, a kąt między krawędzią boczną ostrosłupa i jego wysokością ma miarę 60°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

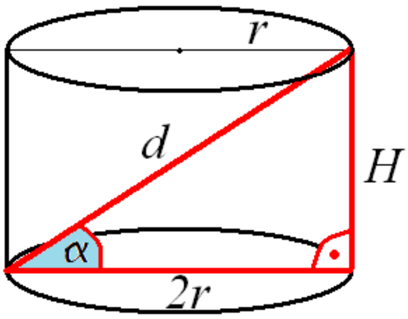
9. Ile wierzchołków i ścian ma ostrosłup, który ma 44 krawędzie?

WALEC :

Walec to bryła obrotowa powstała przez obrót prostokąta dookoła prostej zawierającej jeden z boków prostokąta.

Przekrój osiowy walca to prostokąt, którego jeden bok ma długość wysokości walca, a drugi jest równy średnicy podstawy walca.

- **Odcinki i kąty w walcu**:



α - kąt jaki tworzy przekątna przekroju osiowego walca z płaszczyzną podstawy.

- **Pole powierzchni i objętość walców**:

Objętość:

$$\boxed{V = \pi \cdot r^2 \cdot H}$$

Pole powierzchni:

$$P_c = 2 \cdot \pi \cdot r^2 + 2 \cdot \pi \cdot r \cdot H$$
$$P_b = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot H$$

ZADANIA:

10. Przekątna przekroju osiowego walca ma długość 8 cm i jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem $\alpha = 60°$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego walca.

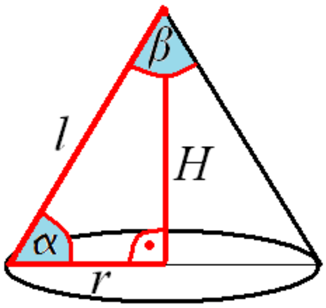
11. Prostokąt o bokach długości 3 cm i 4 cm obraca się wokół dłuższego boku. Oblicz objętość powstałego w ten sposób walca.

STOŻEK :

Stożek to bryła obrotowa powstała przez obrót trójkąta prostokątnego dookoła prostej zawierającej jedną z przyprostokątnych.

Przekrój osiowy stożka to trójkąt równoramienny, którego wysokość jest wysokością stożka, a podstawa jest równa średnicy podstawy stożka.

- **Odcinki i kąty w stożku**:



α - kąt jaki tworzy tworząca stożka z płaszczyzną podstawy

β - kąt rozwarcia stożka

- **Pole powierzchni i objętość stożków:**

Objętość:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot H$$

Pole powierzchni:

$$P_c = \pi \cdot r^2 + \pi \cdot r \cdot l$$
$$P_b = \pi \cdot r \cdot l$$

ZADANIA:

12. Tworząca stożka jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość stożka, jeżeli średnica podstawy ma długość $4\sqrt{3}$ cm.

13. Oblicz objętość stożka o kącie rozwarcia 90° i tworzącej długości $4\sqrt{2}$ cm.

14. Jaką objętość ma stożek, którego powierzchnia boczna po rozwinięciu na płaszczyźnie jest półkolem o średnicy 8 cm?

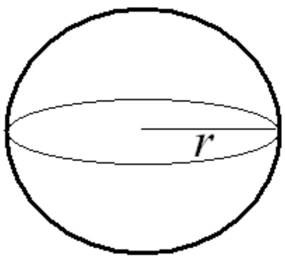
15. Trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4, 5 obraca się wokół krótszej przyprostokątnej. Oblicz objętość powstałej bryły.

KULA :

Kula to bryła obrotowa powstała przez obrót półkola dookoła prostej zawierającej jego średnicę.

Koło wielkie kuli to przekrój kuli płaszczyzną przechodzącą przez środek kuli.

• **Pole powierzchni i objętość kuli**:



Objętość:

$$\boxed{V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3}$$

Pole powierzchni całkowitej:

$$\boxed{P_c = 4 \cdot \pi \cdot r^2}$$

ZADANIA:

16. Koło wielkie kuli ma pole równe 9π cm^2. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej kuli.